1) (2 val) Caracterizar sucintamente a resposta $x(t)$ de um sistema vibratório amortecido com 1 grau de liberdade às seguintes solicitações:

a) (35%) perturbação inicial $x(t=0)=0$ e $\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0$. Esboçar graficamente indicando eventuais pontos notáveis;

b) (35%) solicitação harmónica $f(t)=F_0\cos\omega t$;

c) (30%) solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$.

2) (1 val) A análise do comportamento vibratório de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

a) (50%) Definir função de resposta em frequência; Justificar porque a função de resposta em frequência é um modelo do sistema;

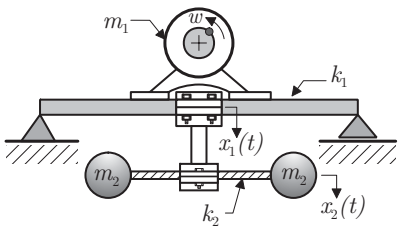
b) (50%) estabelecer a expressão da função receptância e representar graficamente a função mobilidade sob a forma do diagrama de Nyquist, indicando eventuais pontos notáveis.

3) (2 val) As equações de movimento de um sistema linear discreto com n graus de liberdade são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\}+[c]\{\dot{q}(t)\}+[k]\{q(t)\}=\{f(t)\}$

a) (35%) Definir modo natural e forma natural de vibração;

b) (30%) indicar e escrever as propriedades mais relevantes dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração;

c) (35%) indicar, referindo o(s) respectivo(s) princípio(s) em que assentam, 2 procedimentos para resolução das equações de movimento e determinação da resposta $\{q(t)\}$.



4) (1 val) A figura representa um sistema vibratório de massa m_1 ao qual foi acoplado um absorsor de vibrações sintonizado para a frequência de excitação.

a) (50%) Representar graficamente a amplitude de resposta do sistema principal antes e após a montagem do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento;

b) (50%) Actuando ao nível das massas m_1 e m_2, indicar, justificando, uma solução para afastar as 2 frequências naturais ω_1 e ω_2.

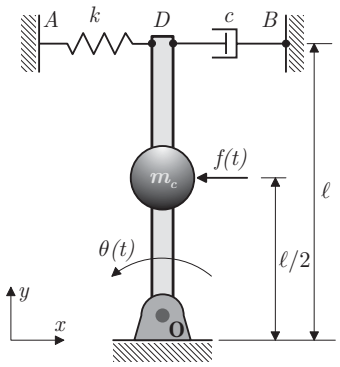
5) (2 val) O isolamento de vibrações é uma técnica de controlo passivo de vibrações.

a) (30%) Indicar em que consiste o isolamento de vibrações numa excitação activa e numa excitação passiva;

b) (35%) Representar a transmissibilidade de deslocamento absoluto e de deslocamento relativo numa excitação passiva, indicando eventuais pontos (zonas) notáveis;

c) (35%) Discutir, justificando, a eficiência do isolamento em termos da massa, da rigidez e do amortecimento do sistema.

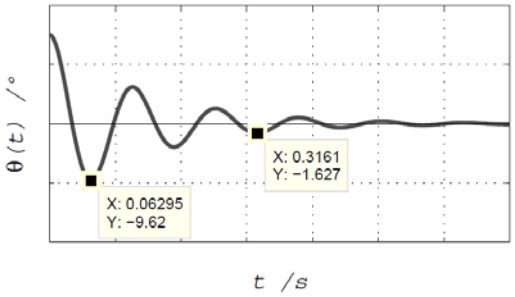
FEUP, 17 de Julho de 2009
José Dias Rodrigues



1) (4 val.) A figura representa um pêndulo invertido constituído por uma barra rígida de massa m_b e de comprimento ℓ, articulada numa das extremidades e, na outra, ligada ao exterior através de um amortecedor viscoso de constante c e de uma mola linear elástica de constante k. Em $\ell/2$ está montada uma massa concentrada m_c. O movimento angular do pêndulo é caracterizado pela coordenada generalizada $\theta(t)$. Para $\theta(t)=0$, a barra encontra-se na vertical.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial de movimento;

Para caracterizar o amortecimento do sistema, aplica-se uma perturbação inicial que provoca a resposta livre ou natural representada na figura.



Para a aplicação numérica

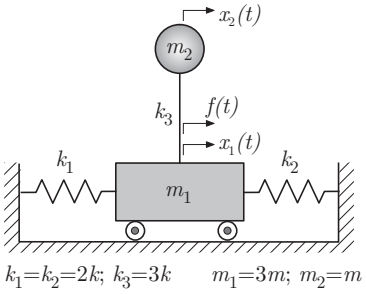
$m_b = 0.82\,\text{kg}$ $m_c = 0.50\,\text{kg}$ $\ell = 300\,\text{mm}$,

determinar:

b) (10%) o decremento logarítmico e a razão de amortecimento;
c) (10%) frequência natural amortecida e não amortecida;
d) (10%) a constante k de rigidez da mola;
e) (10%) a constante c do amortecedor viscoso;

Para caracterizar o comportamento do sistema em frequência, aplica-se uma força harmónica $f(t)=F\cos\omega t$ de amplitude $F=12\,\text{N}$ e faz-se variar a frequência. Determinar:

f) (10%) a frequência para a qual a amplitude $\Theta(\omega)$ é máxima e a respectiva amplitude;
g) (20%) a(s) frequência(s) ω de excitação para a(s) qual(is) a elongação da mola e/ou o curso do amortecedor seja inferior a $10\,\text{mm}$.
h) (10%) nas condições da alínea anterior, determinar o valor máximo da força desenvolvida pelo amortecedor.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera, respectivamente.

a) (20%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

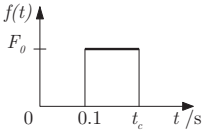
Para resolver as alíneas seguintes, utilizar as equações de movimento seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

Para $k = 200\ \text{Nm}^{-1}$ e $m = 2\ \text{kg}$,

c) (20%) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ quando $f(t)=F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4\ \text{rads}^{-1}$.
d) (10%) Se $f(t)=F\cos\omega t$, determinar a frequência de excitação ω para a qual o sistema barra/esfera actua como um absorsor de vibrações.
e) (10%) Escrever as equações de movimento do sistema na base modal.
f) (20%) Determinar uma estimativa do valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.5\ s$.



3) (4 val.) A figura representa um sistema em torção $\theta(x,t)$ constituído por um veio de comprimento ℓ com duas rodas montadas nas extremidades $x=0$ e $x=\ell$ e cujos momentos polares de inércia valem, respectivamente, J_1 e J_2. A secção recta do veio é circular e apresenta um momento polar I_p. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

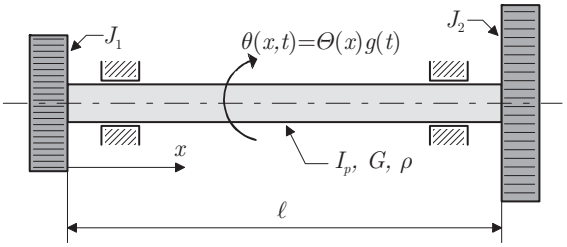
Considerando as funções de aproximação $\psi_1(x)=\cos\frac{\pi x}{\ell}$ e $\psi_2(x)=\cos\frac{2\pi x}{\ell}$ para a primeira forma natural de vibração $\Theta(x)$,

b) (20%) Esboçar a representação gráfica (no domínio do veio) das 2 funções de aproximação consideradas e discutir, justificando, a sua utilização no método de Rayleigh. Seleccionar, justificando, dentre as 2 funções consideradas, a função mais adequada para estimar a frequência natural fundamental do sistema pelo método de Rayleigh.

Para $J_1=\alpha\rho I_p\ell$ e $J_2=\beta\rho I_p\ell$ e utilizando o método de Rayleigh, determinar:

c) (30%) uma estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R}=\sqrt{\frac{G}{\rho\ell^2}}\,g(\bullet)$ onde $g(\bullet)$ representa uma função. Comentar o resultado.

d) (30%) Utilizando a solução analítica exacta para um veio de secção constante, $\theta(x,t)=\left(A\cos\frac{\omega}{c}x+B\sin\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t+D\sin\omega t\right)$, estabelecer, sob a forma de um determinante ($\left|\ddots\right|$), a equação de frequências naturais de vibração de torção para o sistema em análise.



Feup, 17.07.2009
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro